10.5. SZÖGFÜGGVÉNYEK

A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai – megoldások

2633 *a)* Pozitív. *b)* Pozitív.
c) Negatív. *d)* Mivel $\sin 3 > 0$, $\cos 4 < 0$, ezért negatív.

2634 A következő táblázatot kapjuk:

α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2635 *a)* 1; *b)* –4; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$; *d)* $-\frac{\sqrt{3}}{8}$; *e)* 2.

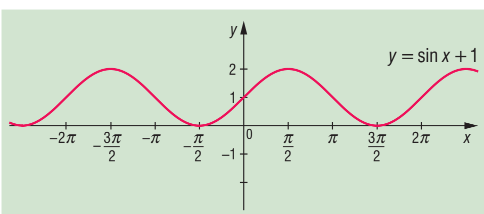
2636 *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* 0; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *f)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *h)* $-\frac{1}{2}$.

2637 *a)* 0; *b)* 1; *c)* 0; *d)* 1; *e)* 0; *f)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
g) $-\frac{1}{2}$; *h)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

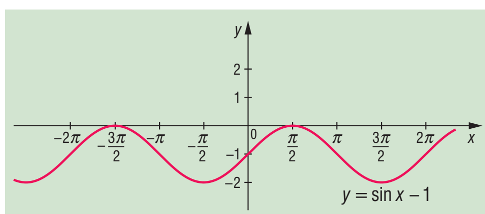
2638 *a)* 0; *b)* 0.

A szinuszfüggvény grafikonja – megoldások

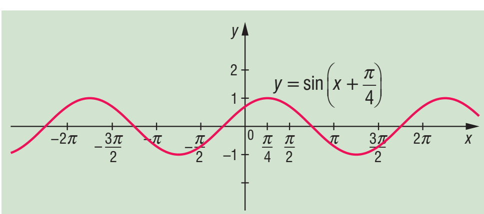
2639 *a)*



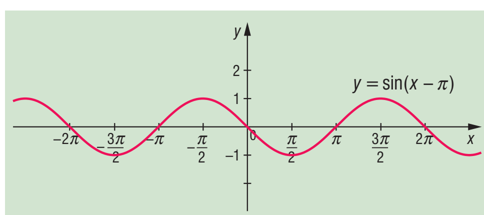
b)



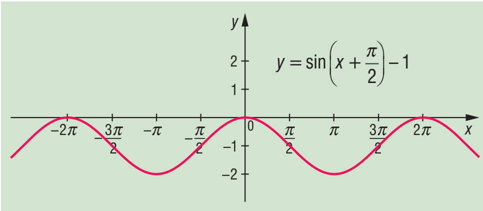
c)



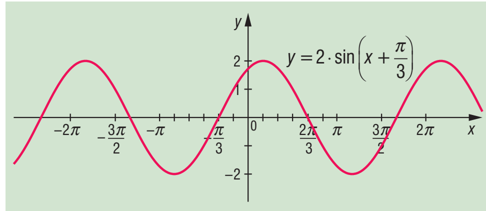
d)



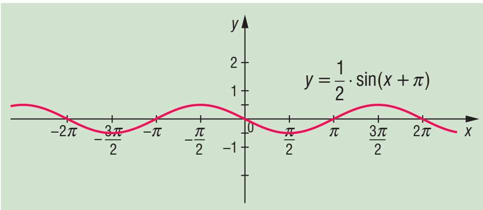
e)



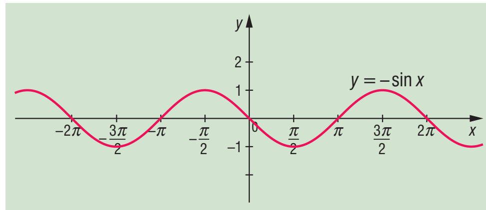
f)



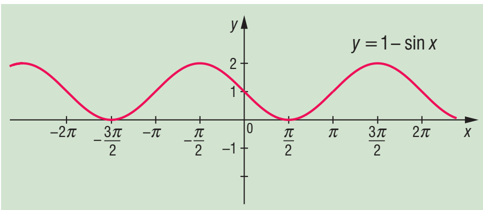
g)



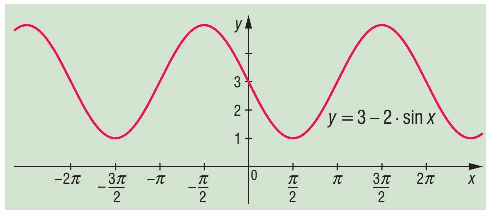
h)



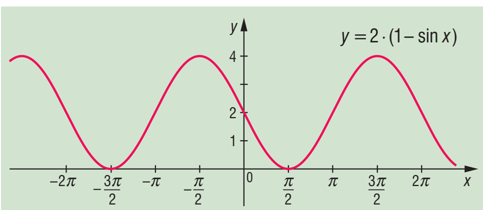
i)



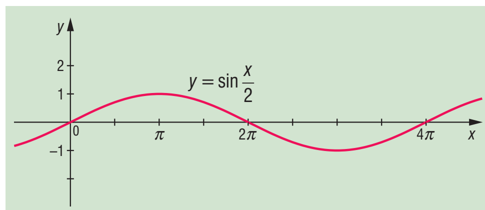
j)



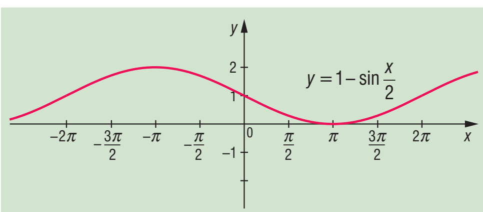
k)



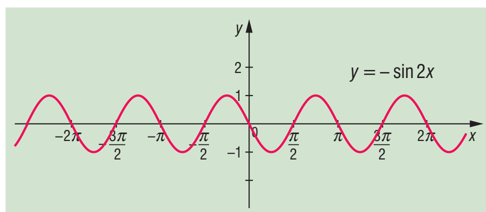
l)



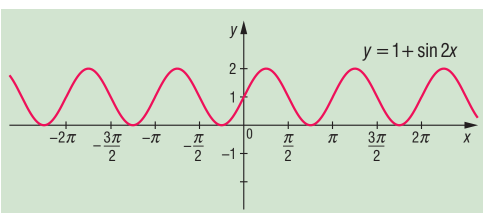
m)



n)



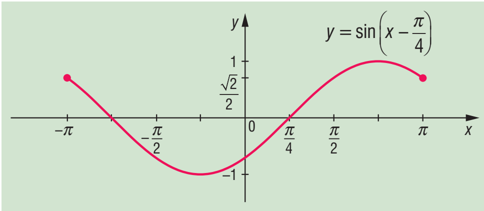
o)



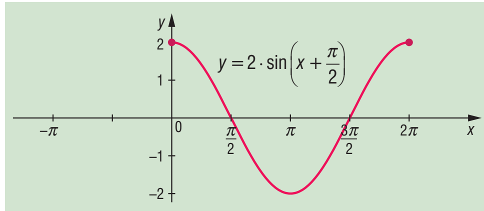
2640 *a)* $\sin\frac{1}{2} < \sin 1$; *b)* $\sin(-0{,}2) > \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; *c)* $\sin 2 > \sin 3$; *d)* $\sin(\pi - 2) = \sin 2$.

2641 *a)* $x = 0$; *b)* $x = \pi$; *c)* $x = -\pi$.

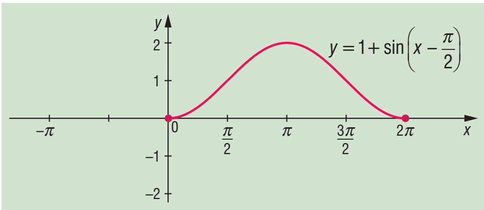
2642 *a)*



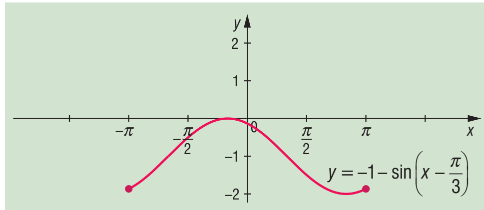
b)



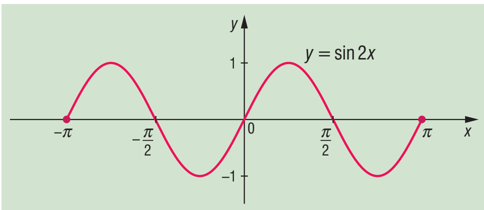
c)



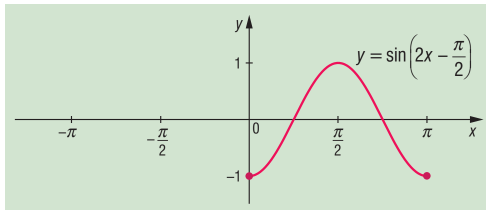
d)



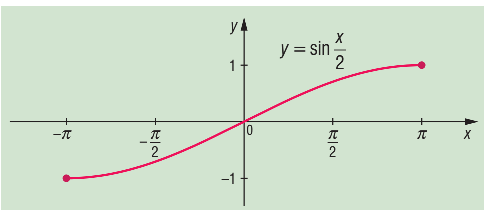
e)



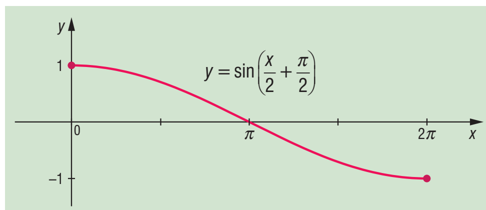
f)



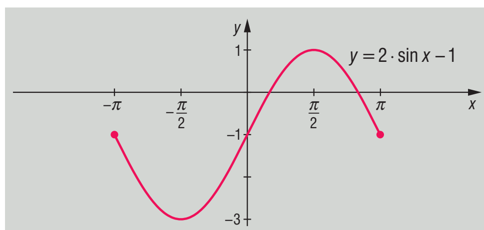
g)



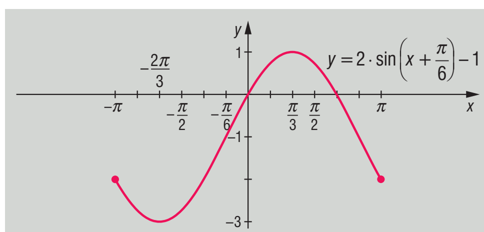
h)



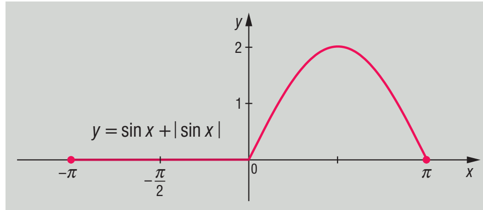
2643 *a)* A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ban nő. A $-\frac{\pi}{2}$ helyen minimuma, a $\frac{\pi}{2}$ helyen pedig maximuma van. A minimum értéke -3, a maximum értéke 1.



b) A függvény $\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$-ban nő. A $-\frac{2\pi}{3}$ helyen minimuma, a $\frac{\pi}{3}$ helyen pedig maximuma van. A minimum értéke -3, a maximum értéke 1.

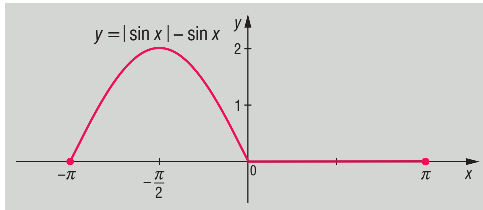


c) A megadott függvény $[-\pi; 0]$-ban konstans, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben nő, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben pedig csökken.
A $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, értéke itt 2, minimuma 0, ezt $[-\pi; 0]$-ban és π-ben veszi fel.



d) *Megjegyzés:*

$$|\sin x| - \sin x = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \sin x \geq 0, \\ -2 \cdot \sin x, & \text{ha} \quad \sin x < 0. \end{cases}$$

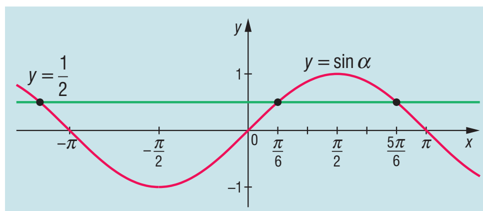


2644 Például:

a) $\alpha = 60°, 120°, 420°$;
b) $\alpha = 210°, 330°, 570°$;
c) $\alpha = 127°, 413°, 487°$;
d) $\alpha = 340°, 560°, 700°$.

2645 *a)* $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$;
b) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$;
c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, illetve $\frac{2\pi}{3} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

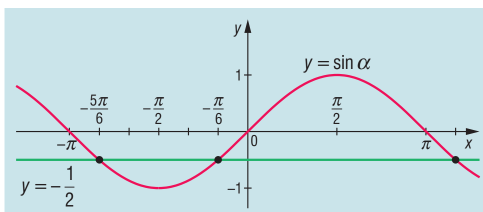
2646 *a)* Vegyük észre, hogy a $2x + 30° = \alpha$ helyettesítéssel csak a $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldani.
Visszahelyettesítés után a megoldások:
$x_1 = k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 60° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$.



b) Helyettesítéssel a $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldani függvénygrafikonnal.
Visszahelyettesítés után a megoldások:

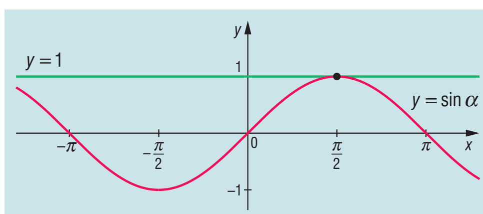
$$x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



c) Hasonlóan az *a)* és *b)* feladat megoldásához, helyettesítéssel a $\sin\alpha = 1$ egyenletet kapjuk, amiből visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

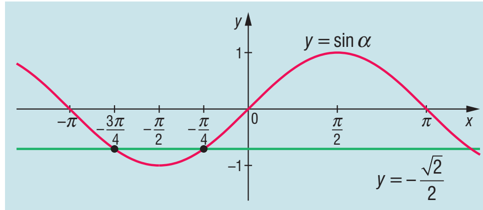


d) Vegyük észre, hogy (–2)-vel osztás után:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=-\frac{\pi}{8}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

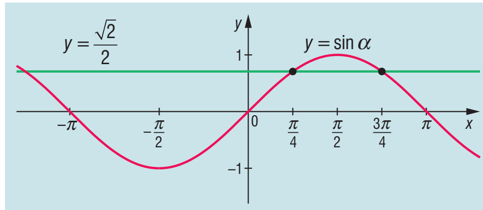


e) Helyettesítéssel:

$$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},\quad k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2n\pi}{5},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

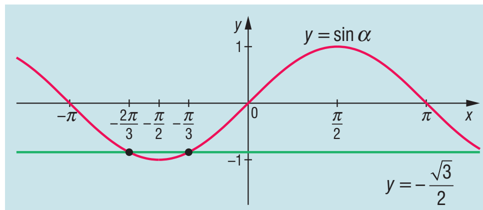


f) Vegyük észre, hogy 2-vel osztás után:

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z};\ x_2=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

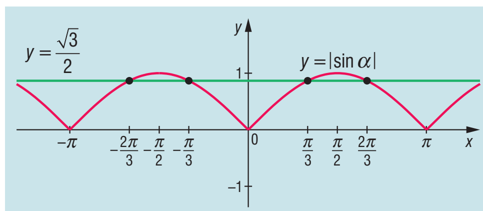


g) 4-gyel osztás, majd négyzetgyökvonás után:

$$\left|\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad |\sin\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

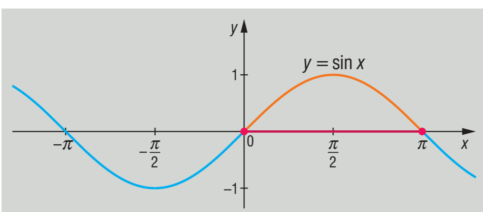
$$x_1=\frac{k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{\pi}{9}+\frac{n\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}.$$



2647 *a)* *B)*; *b)* *C)*; *c)* *A)*; *d)* *B)*.

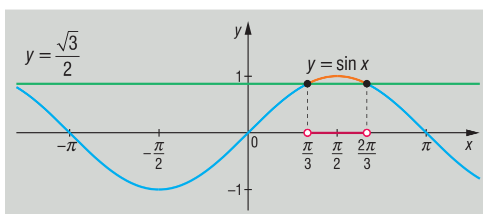
2648 *a)* 10π; *b)* $\frac{\pi}{2}$; *c)* $\frac{2\pi}{7}$; *d)* 2π; *e)* 4π; *f)* $\frac{2\pi}{5}$.

2649 *a)*



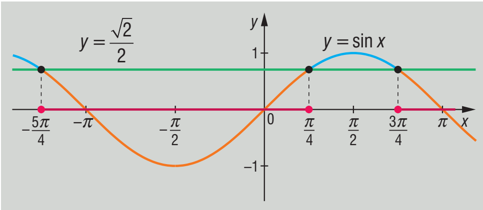
$$2k\pi\le x\le\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

b)



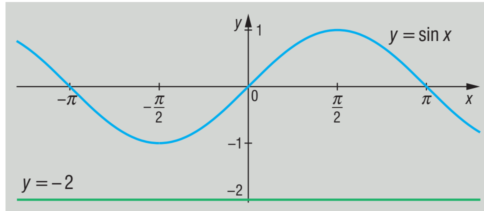
$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

c)



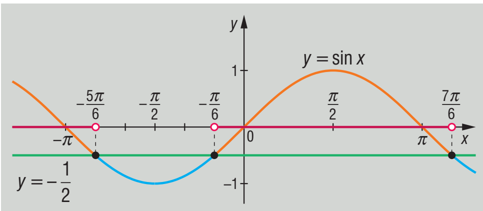
$-\frac{5\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

d)



nincs megoldás, mert $-1 \le \sin x \le 1;$

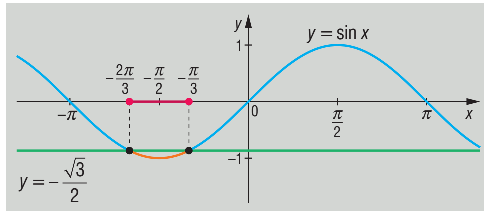
e)



2-vel való osztás után: $\sin x > -\frac{1}{2}$,

$-\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

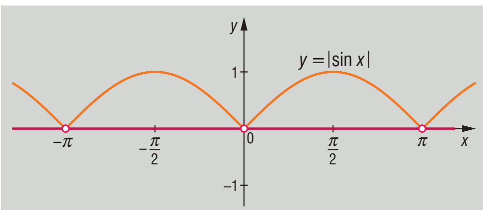
f)



2-vel való osztás után: $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

g)



átalakítás után: $|\sin x| > 0,\ x \ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2650 *a)* Alakítsuk át az eredeti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -1 \quad\Rightarrow\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy így csak a $\sin\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenséget kell függvénygrafikonok segítségével megoldani. A grafikonok a 2646. feladat *d)* pontjában láthatók. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi < x+\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}+2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

b) (–2)-vel való osztás után:

$$-2\cdot\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\le\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Grafikonnal megoldandó a $\sin\alpha\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenség (ld. 2646. feladat *d)* pontja).
A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\alpha\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 2x-\frac{3\pi}{2}\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi,$$

$$\frac{5\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{8}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

c) 2-vel való osztás után:

$$2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Grafikonnal megoldandó a $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenség (ld. 2649. feladat *b)* pontja).
A megoldás:

$$-\frac{4\pi}{3}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{4\pi}{3}+2k\pi<x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+2k\pi,$$

$$-\frac{7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

d) Hasonlóan az előző feladatokhoz:

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\alpha\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi,$$

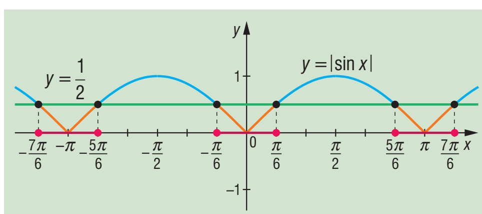
$$k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

2651 *a)* 2-vel való osztás után:

$$|\sin x|\le\frac{1}{2}.$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

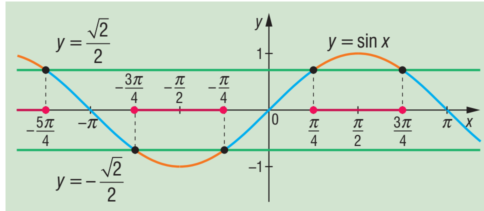


b) Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\sin^2 x \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből:

$$\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



A megoldás:

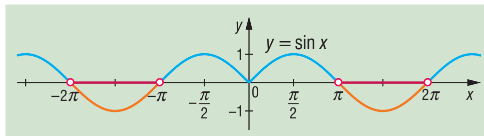
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rövidebben:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) A $\sin|x|$ felbontása:

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -\sin x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



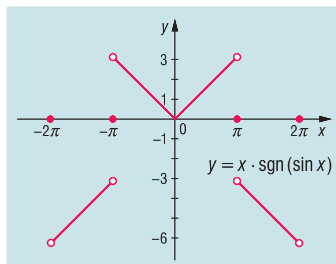
A megoldás:

$$-2\pi + 2k\pi < x < -\pi + 2k\pi, \quad k \leq 0,\ k \in \mathbb{Z}$$

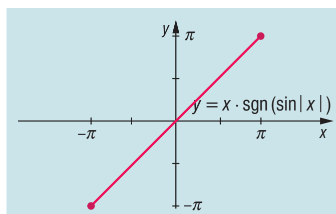
vagy

$$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

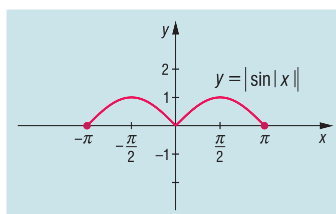
2652 *a)* A függvény értéke a $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyen 0, a grafikon egyenes szakaszokból áll. Páros függvény.
$]2k\pi; (2k+1)\cdot\pi[$-ban ($k \in \mathbb{Z}$) nő,
$](2k-1)\cdot\pi; 2k\pi[$-ban ($k \in \mathbb{Z}$) csökken,
szélsőértéke nincs.



b) A függvény $]-\pi; \pi[$-ban nő.
Az $x = -\pi$ helyen minimuma van, értéke $-\pi$.
Az $x = \pi$ helyen maximuma van, értéke π.

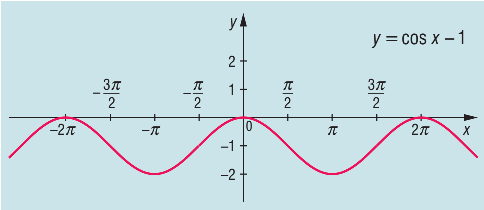


c) A megadott függvény páros, $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben nő, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben csökken.
A $-\pi$; 0; π helyen minimuma van, itt értéke 0.
A $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, itt értéke 1.

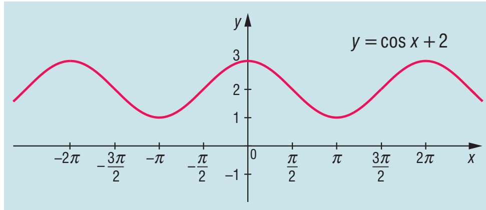


A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

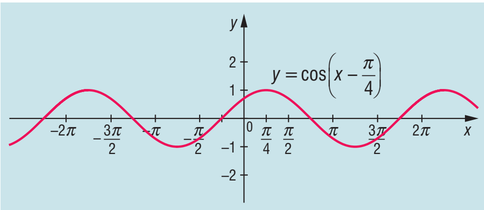
2653 *a)*



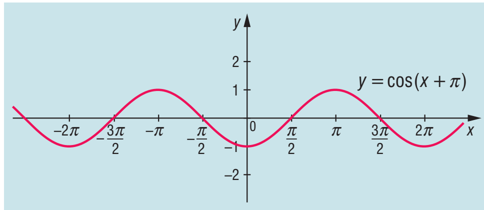
b)



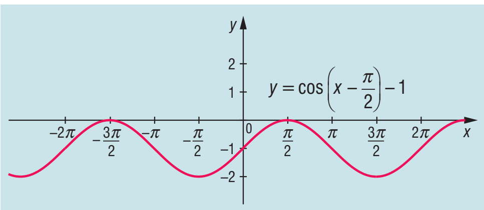
c)



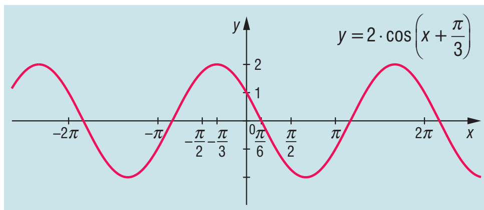
d)



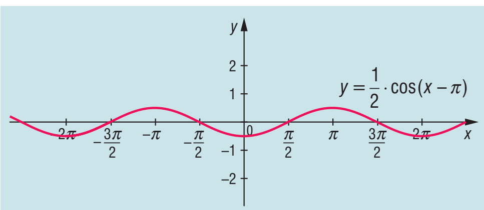
e)



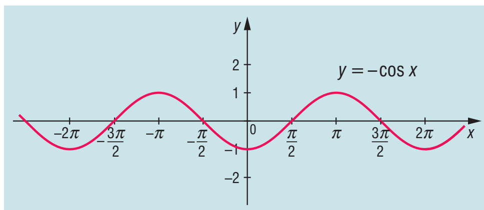
f)



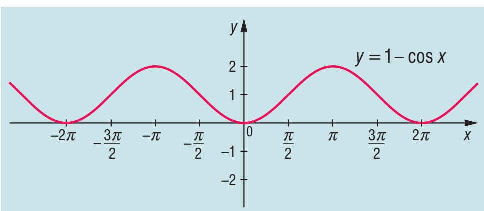
g)



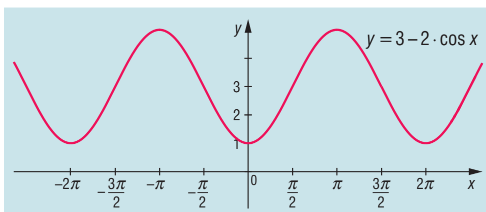
h)



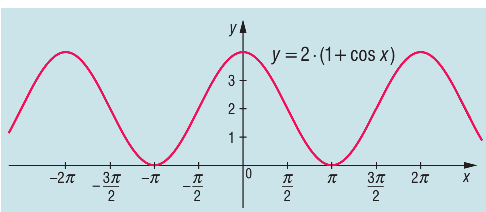
i)



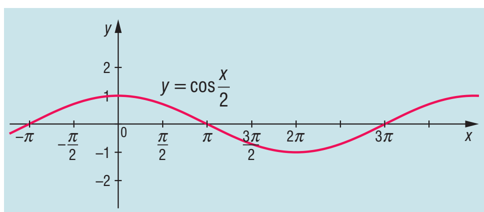
j)



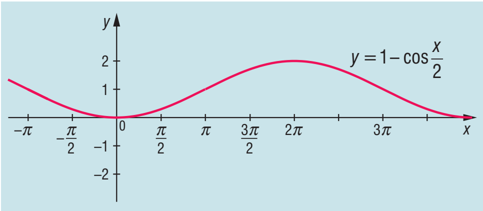
k)



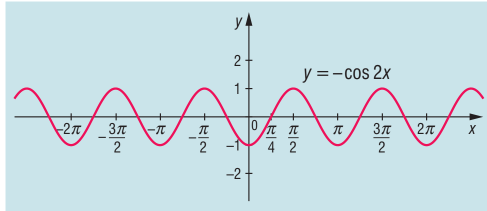
l)



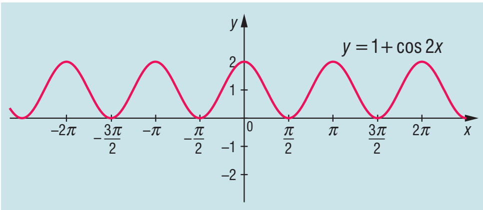
m)



n)



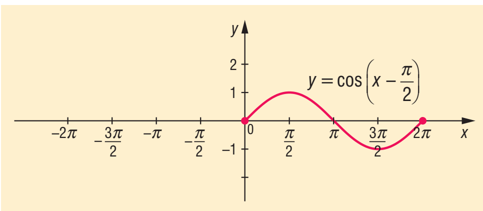
o)



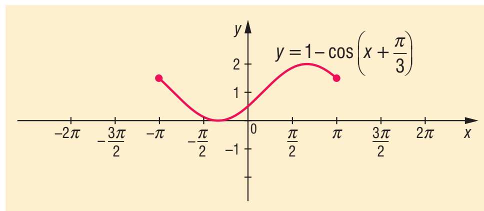
2654 *a)* $x = \frac{\pi}{2}$; *b)* $x = -\frac{\pi}{2}$; *c)* $x = -\frac{\pi}{2}$.

2655 *a)* $\cos 1 > \cos 1{,}5$; *b)* $\cos 1 = \cos(-1)$; *c)* $\cos 1 > \cos 3$.

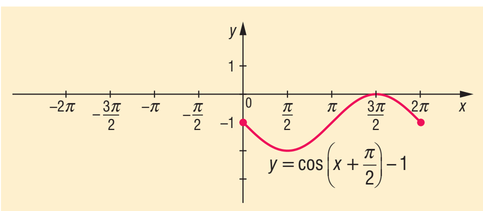
2656 *a)*



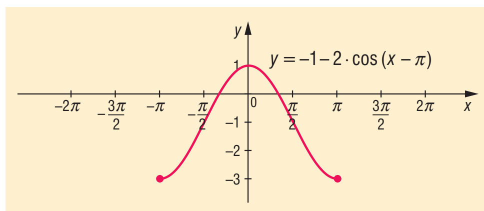
b)



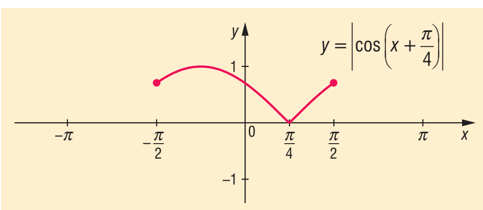
c)



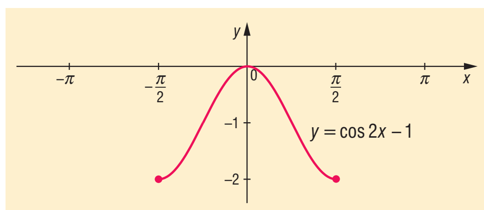
d)



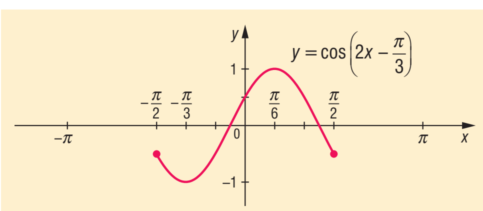
e)



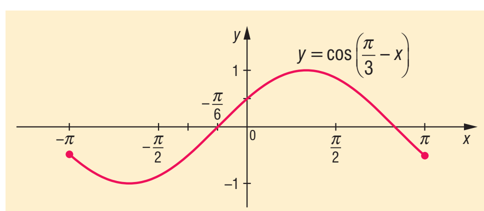
f)



g)



h)

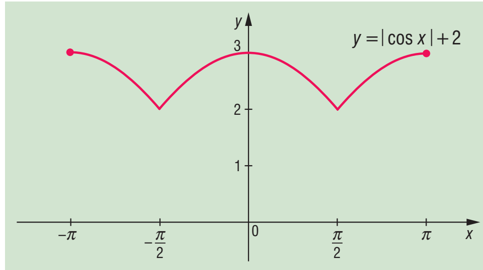


2657 *a)* $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben csökken,

$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben nő.

Maximuma van a $-\pi$, 0, π helyeken, értéke 3.

Minimuma van a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyeken, értéke 2.

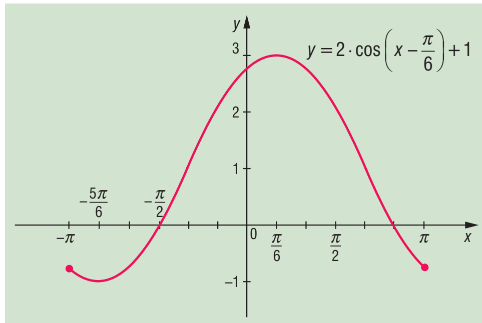


b) $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$-ben csökken,

$\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$-ben nő.

Minimuma van a $-\frac{5\pi}{6}$ helyen, értéke -1.

Maximuma van a $\frac{\pi}{6}$ helyen, értéke 3.

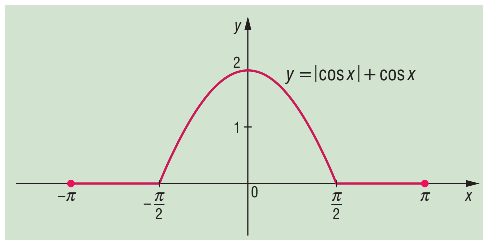


c) Bontsuk fel az abszolút értéket:

$$|\cos x| + \cos x = \begin{cases} 2 \cdot \cos x, & \text{ha} \quad \cos x \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad \cos x < 0. \end{cases}$$

$\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben konstans,

$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ben nő, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben csökken.



Minimuma van a $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben, értéke 0, maximuma van $x = 0$ helyen, értéke 2.

2658 Például:

a) $\alpha = 45°, 315°, 405°$;

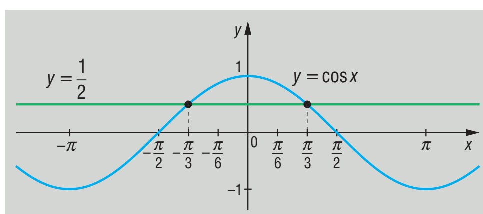
b) $\alpha = 150°, 210°, 510°$;

c) $\alpha = 320°, 400°, 680°$;

d) $\alpha = 230°, 490°, 590°$.

2659 *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



b) Hasonlóan az *a)* feladathoz:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

e) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$ Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

f) Nincs megoldás.

g) Nincs megoldás.

h) Átalakítás után: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$ Megoldások: $x_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

Rövidebben: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

i) Átalakítás után: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Megoldások: $x_1 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

Rövidebben: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

j) $x_1 = -70{,}53° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = 70{,}53° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}.$

Rövidebben: $x = \pm 70{,}53° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.$

k) $x_1 = -66{,}42° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = 66{,}42° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}.$

Rövidebben: $x = \pm 66{,}42° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.$

2660 *a)* A függvény grafikonja a 2653. feladat *c)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) A függvény grafikonja a 2653. feladat *h)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) A függvény grafikonja a 2653. feladat *l)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) A függvény grafikonja a 2653. feladat *k)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\pi + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

2661 Az egyenleteket a 2646. feladathoz hasonlóan lehet megoldani.

a) Helyettesítsünk $2x = \alpha$-t, így a $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 2x + 60°$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = 60° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = 300° + l \cdot 360°,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = 120° + l \cdot 180°,\ l \in \mathbb{Z}.$$

c) Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 3x - \frac{\pi}{3}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{36} + \frac{2l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

d) Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 2x - \frac{\pi}{6}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

e) (–2)-vel való osztás és $\alpha = 5x - \frac{\pi}{4}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2l\pi}{5},\ l \in \mathbb{Z}.$$

f) 2-vel való osztás és $\alpha = 2x - \frac{3\pi}{4}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

g) 4-vel való osztás után:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \iff |\cos x| = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{1}{2}.$$

Mind a négy síknegyedben keressünk megoldást:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

h) $\alpha = 2x + \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel:

$$\cos^2 \alpha = 1 \iff |\cos \alpha| = 1 \iff \cos \alpha = \pm 1.$$

A megoldások:

$$\alpha_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \pi + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

i) 4-gyel való osztás és $\alpha = 3x - \frac{\pi}{2}$ helyettesítés után:

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \iff |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel mind a négy síknegyedben keresünk megoldást:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_3 = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_4 = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z},$$

$$x_3 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2m\pi}{3},\ m \in \mathbb{Z}, \quad x_4 = \frac{5\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Egyszerűbben:

$$x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

j) Hasonlóan az előző feladathoz:

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

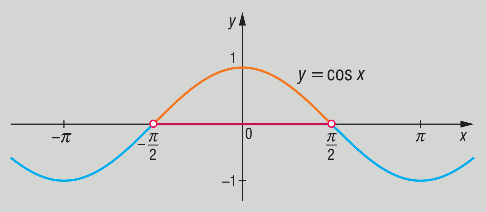
$$x_3 = \frac{9\pi}{4} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Egyszerűbben:

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{9\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

2662 *a)* A megoldás:

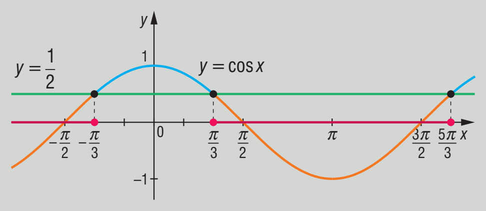
$$x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



b) Mindig teljesül, mert $-1 \le \cos x \le 1$.

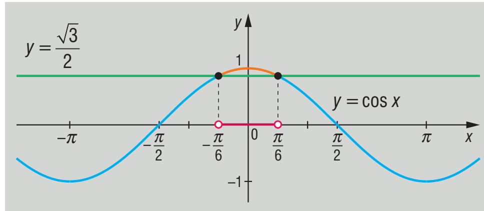
c) A megoldás:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$



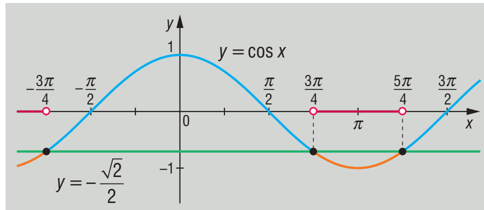
d) A megoldás:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



e) A megoldás:

$$x \in \left]\frac{3\pi}{4}+2k\pi; \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

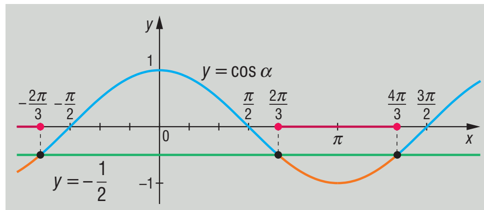


f) Helyettesítéssel:

$$\cos 2x \le -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \le -\frac{1}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}+k\pi; \frac{2\pi}{3}+k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

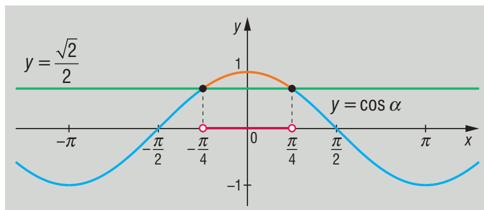


g) 2-vel osztva és helyettesítve:

$$2\cdot\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right) > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left]\frac{5\pi}{8}+k\pi; \frac{7\pi}{8}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

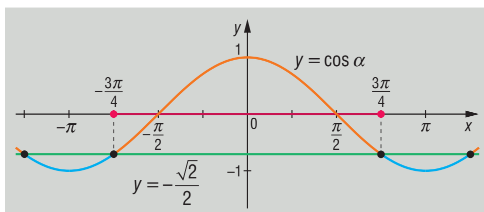


h) 2-vel osztva és helyettesítve:

$$2\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$



i) Használjuk ki, hogy $\cos x$ páros függvény:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos\left[-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Helyettesítéssel tehát a $\cos\alpha > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A *c)* pont grafikonja alapján visszahelyettesítés után a megoldás:

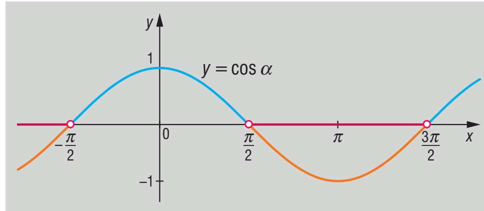
$$x \in \left]2k\pi; \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

j) Helyettesítéssel:

$$\cos 4x < 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha < 0.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



2663 Mivel a szinusz- és koszinuszfüggvény értéke abszolút értékben 1-nél nem nagyobb, ezért:

$$\sin^6 x \le \sin^2 x \quad \text{és} \quad \cos^6 x \le \cos^2 x.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$f(x) \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Az f értéke akkor 1, ha $|\sin x| = 1$ vagy $|\cos x| = 1$, tehát $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ esetén.

2664 A megoldás: $f(-x) = -\sin x - \sin^3 x - 5 \cdot \cos x \cdot \sin 2x = -f(x)$.

2665 A megoldás: $f(-x) = f(x)$.

2666 *a)* Használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$(1 - \cos^2 x) - |\cos x| < \frac{1}{4},$$

$$4 - 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot |\cos x| < 1,$$

$$4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot |\cos x| - 3 > 0,$$

$$4 \cdot |\cos x|^2 + 4 \cdot |\cos x| - 3 > 0.$$

Legyen $p = |\cos x|$. Ekkor $4p^2 + 4p - 3 > 0$, ahonnan $p < -\frac{3}{2}$ vagy $p > \frac{1}{2}$.

Visszahelyettesítve: $|\cos x| < -\frac{3}{2}$ vagy $|\cos x| < \frac{1}{2}$. Csak ez utóbbinak van megoldása:

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

b) A nevező miatt $\cos x \ne 0$, azaz $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alakítsuk át az egyenlőséget:

$$\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x}{\cos x} \le 4,$$

$$\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{5 - 4 \cdot (1 - \cos^2 x) - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{5 - 4 + 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x + 1}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{(2 \cdot \cos x - 1)^2}{\cos x} \le 0.$$

A kapott hányados számlálója nemnegatív.

A hányados akkor 0, ha a számlálója nulla, azaz ha $2 \cdot \cos x - 1 = 0$, amiből $\cos x = \frac{1}{2}$. Ekkor a megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

A hányados negatív, ha a nevezője negatív, azaz ha $\cos x < 0$. Ekkor a megoldás:

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2667 Az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályai:

$$a(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1; \quad b(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2; \quad c(x) = 2 \cdot \sin 2x; \quad d(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{1}{2} \cdot x.$$

2668 Akkor értelmezett az egyenlőség, ha $x \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2 \cdot \cos y \cdot x = x^2 + 1,$$
$$x^2 - 2 \cdot \cos y \cdot x + 1 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot \cos y \pm \sqrt{4 \cdot \cos^2 y - 4}}{2} = \frac{2 \cdot \cos y \pm 2 \cdot \sqrt{\cos^2 y - 1}}{2} = \cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}.$$

Ez akkor, és csak akkor létezik valós x-re, ha $\sin y = 0$, vagyis $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ha $y = 2n\pi$, akkor $x = 1$; ha $y = (2n+1) \cdot \pi$, akkor $x = -1$.

A keresett számpárok tehát:

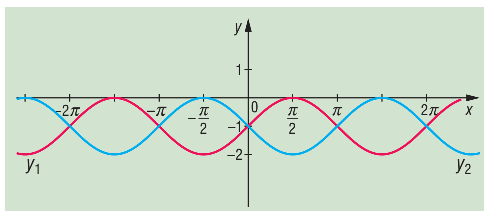
$$(1;\ 2n\pi) \quad \text{és} \quad (-1;\ (2n+1) \cdot \pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2669 Használjuk a megoldóképletet:

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2 \alpha}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

A megoldások tehát:

$$y_1 = -1 + \sin\alpha \quad \text{és} \quad y_2 = -1 - \sin\alpha.$$



2670 A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát így alakíthatjuk át:

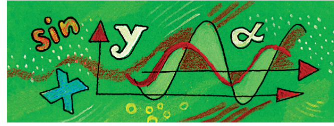
$$\frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot (\cos x - \sin x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)}.$$

Ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$, akkor $0 < \operatorname{tg} x < 1$, ezért $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x > 2$, és a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján $0 < \operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x) \leq \frac{1}{4}$, ezzel ekvivalens: $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} \geq 4.$

Ezek alapján:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} > 8.$$



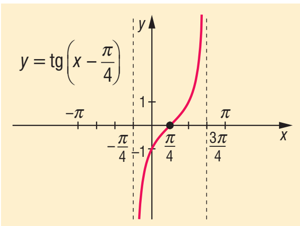
2671 Mivel $\cos^2 x \le 1$ és $\cos 2x \le 1$ minden $k \in \mathbb{R}$ esetén:

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos 2x \le 5.$$

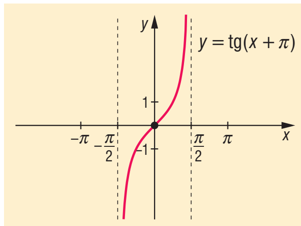
2672 Mivel az egyenlőség bal oldalán $\sin 2x \le 1$ és $\cos x \le 1$, ezért $4 \cdot \sin 2x + \cos x \le 5$, az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\sin 2x = 1$ és $\cos x = 1$. Ez a két feltétel egyszerre nem teljesül, hiszen ha $\cos x = 1$, akkor $\sin x = 0$, és így $\sin 2x = 0$. Az egyenletnek tehát nincs valós gyöke.

A tangens- és kotangensfüggvény – megoldások

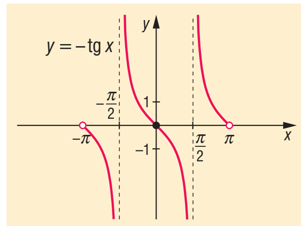
2673 *a)*



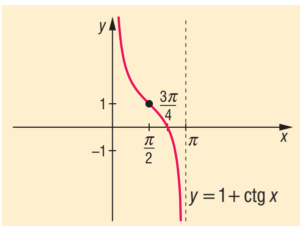
b)



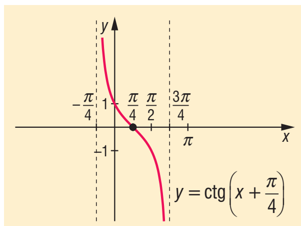
c)



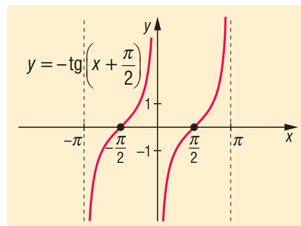
d)



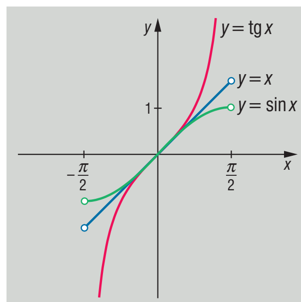
e)



f)



2674 A három függvény grafikonja az ábrán látható.



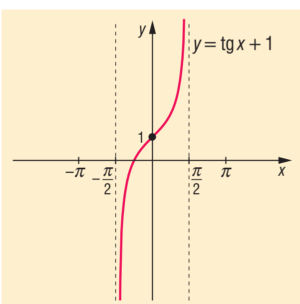
2675 *a)* $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

b) $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

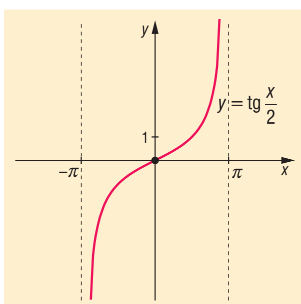
c) $\dfrac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

d) $k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

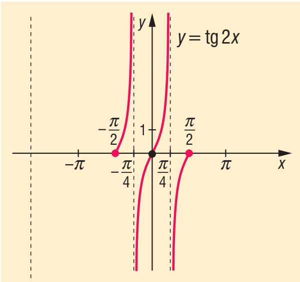
2676 *a)*



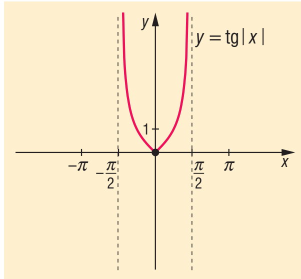
b)



c)

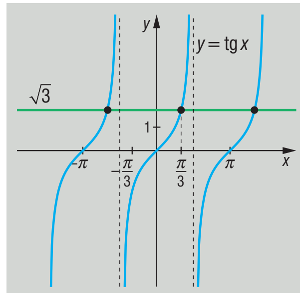


d)



2677 *a)* A megoldások:

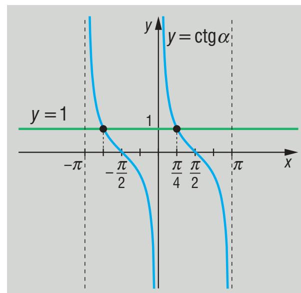
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



b) Ábrázoljuk a függvényt az $\alpha = \frac{\pi}{3} - x$ helyettesítéssel.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

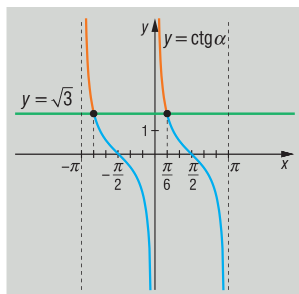
$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



c) Ábrázoljuk a függvényt az $\alpha = x - \frac{\pi}{3}$ helyettesítéssel.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



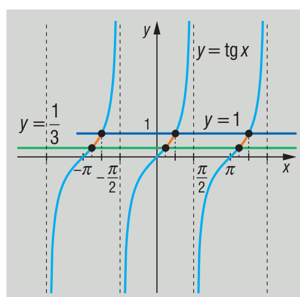
d) Alakítsuk át a bal oldalt:

$$3 \cdot \text{tg}^2 x - 4 \cdot \text{tg}\, x + 1 = (3 \cdot \text{tg}\, x - 1) \cdot (\text{tg}\, x - 1) < 0.$$

Tényezőnként keressük meg a zérushelyeket, majd tartsunk előjelvizsgálatot.

A megoldások:

$$0{,}32 + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



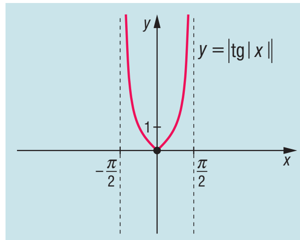
2678 *a)* $k\cdot\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$ *b)* $-2\pi+4k\pi<x<4k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

c) $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x<\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ *d)* $\frac{\pi}{4}+k\pi<x\le\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

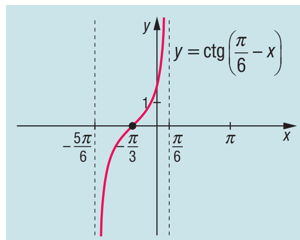
e) $-\frac{\pi}{2}+k\pi\le x<-\frac{\pi}{4}+k\pi$ és $\frac{\pi}{4}+k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

f) $\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2679 *a)* A függvény $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$-ban csökken, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$-ben nő, a 0 helyen minimuma van, értéke itt 0.



b) A függvény $\left]-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[$-ban nő, a 0 értéket $-\frac{\pi}{3}$-nál veszi fel.



2680 A függvény legkisebb értéke 2, ezt az $x=\frac{\pi}{4}$-nél veszi fel, legnagyobb értéke nincs.

Megjegyzés: $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\ge 2,$ mivel $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$-on a $\operatorname{tg}x$ pozitív.

2681 *a)* A bal oldal értéke minden x-re 1, így az egyenlet ekvivalens a következővel: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$ azaz $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

b) $\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$ *c)* $\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$

d) $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2682 Mivel $0\le x<\frac{\pi}{2}$ esetén $\operatorname{tg}x\ge 0,$ és $\operatorname{tg}x$ szigorúan nő, ezért kiemelés után:

$$2\cdot\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}x\cdot(2-\operatorname{tg}x).$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{tg}x+(2-\operatorname{tg}x)}{2}\ge\sqrt{\operatorname{tg}x\cdot(2-\operatorname{tg}x)},$$

$$1\ge\operatorname{tg}x\cdot(2-\operatorname{tg}x).$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\operatorname{tg}x=2-\operatorname{tg}x,$ azaz $\operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}.$

Ha $\operatorname{tg}x>2,$ akkor $2\cdot\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x<0.$

Így a függvény legnagyobb értéke 1, és ezt $x=\frac{\pi}{4}$-nél veszi fel.

2683 Alakítsuk át az f-et definiáló kifejezést, bővítsük a törtet $\sin x$-szel:

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\left(\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) \cdot \sin x}{\left(\cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) \cdot \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}.$$

Mivel az értelmezési tartományban $0 < |\cos x|, |\sin x| < 1$, $\cos x$ és $\sin x$ korlátossága miatt mindkét tört számlálója és nevezője pozitív, tehát f értéke pozitív.

2684 A $\operatorname{tg} x$ miatt $\cos x \neq 0$. A megadott értelmezési tartományban $\cos x$ pozitív, ezért:

$$1 - \cos x < \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x,$$

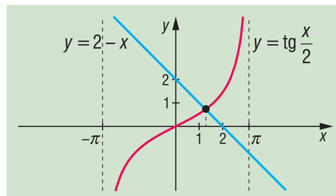
$$\cos x \cdot (1 - \cos x) < \sin x \cdot (1 - \cos x).$$

Mivel az adott értelmezési tartományban $(1 - \cos x) > 0$, így egyszerűsítés után a $\cos x < \sin x$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek megoldása az adott intervallumon:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}.$$

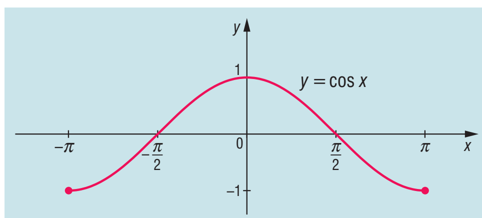
2685 Ábrázoljuk $]-\pi; \pi[$-ben az $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ és $g(x) = 2 - x$ függvényeket.

Az ábráról leolvasható, hogy a keresett gyök 1,2 és 1,3 között van, zsebszámológép használatával eljuthatunk az $x \approx 1{,}27$ értékhez.



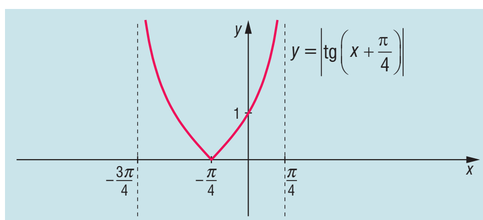
Összetett feladatok és alkalmazások – megoldások

2686 *a)* A szinuszfüggvény pótszöges összefüggéséből látható, hogy $g(x) = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$.
A függvény $[-\pi; 0]$-ban nő, $[0; \pi]$-ban csökken.
Minimuma van a $-\pi$ és π helyen, értéke -1.
Maximuma van az $x = 0$ helyen, értéke 1.



b) A függvény $\left]-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$-ban csökken, majd $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right[$-ban nő.

Minimuma van az $x = -\dfrac{\pi}{4}$ helyen, értéke 0.



2687 *a)* Mivel $|\sin x| \le 1$, $0 \le \sin^2 x \le 1$, így $1 \le \sin^2 x + 1 \le 2$.
Az f minimális értéke 1, ezt az $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alakú helyeken veszi fel.
Az f maximális értéke 2, ezt a $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ alakú helyeken veszi fel.

b) Átalakítás után: $g(x) = 3 + \cos^2 x$, tehát $3 \le g(x) \le 4$, hiszen $0 \le \cos^2 x \le 1$, ha $x \in \mathbb{R}$.

2688 A $\cos x$-re másodfokú egyenlet egyik gyöke $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} > 1$, ez nem lehet koszinuszérték, a másik gyök $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ez már lehet egy szám koszinusza.

A megoldások: $x_1 = 0{,}96 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és $x_2 = 5{,}33 + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

2689 *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

b) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 4k\cdot\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = -\frac{\pi}{5} + 4n\cdot\frac{\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}.$

c) $x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\cdot\frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}.$

d) $x_1 = k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = n\cdot\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}.$

2690 Azonos átalakításokkal az egyenlet így írható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1.$$

Kivonva az 1-et, és tudva, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kapjuk:

$$-2\cdot\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot\sin^2 x\cdot(\sin^2 x - 1) = 0.$$

Ez akkor teljesülhet, ha $\sin x = 0$ vagy $|\sin x| = 1$. Így a megoldások:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z};\quad \text{rövidebben: } x = k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2691 Az egyenlet így írható:

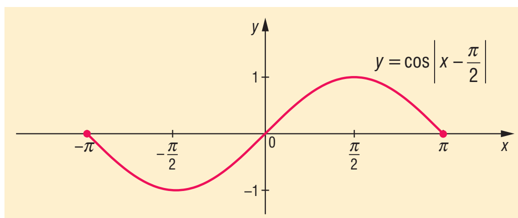
$$6\cdot\sin^2 x - 11\cdot\sin x + 4 = 0.$$

Ebből csak $\sin x = 0{,}5$ jöhet szóba megoldásként, és így

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2692 A függvény átírható a következő alakra:

$$\cos\left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, & \text{ha } -\pi \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



2693 *a)* Ekvivalens átalakítást végzünk:

$$\sqrt{3}\cdot\cos x > 1 - \sin x.$$

Mivel az $1 - \sin x \ge 0$ (hiszen $-1 \le \sin x \le 1$), ezért az egyenlőtlenség bal oldalának határozottan pozitívnak kell lennie (az egyenlőséget a feladat nem engedi). Vagyis $\cos x > 0$, tehát

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Négyzetre emelés után:

$$0 > 2\cdot\sin^2 x - \sin x - 1,$$

aminek a megoldása:

$$-0{,}5 < \sin x < 1,\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Felismerve, hogy a bal oldal $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ és $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, az egyenlet $\sin x$-szel való osztása után a következő alakban írható fel:

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} x=\sqrt{2}.$$

Ebből

$$x=0{,}96+k\pi.$$

2694 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x)=\sin^2 x-\sin x-2\cdot\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x-2\cdot(1-\sin^2 x)=$$
$$=3\cdot\sin^2 x-\sin x-2=(\sin x-1)\cdot(3\cdot\sin x+2).$$

Így a függvény zérushelyét a $(\sin x-1)\cdot(3\cdot\sin x+2)=0$ egyenlet adja. Ebből $\sin x=1$, vagy $\sin x=-\frac{2}{3}$, azaz $x_1=\frac{\pi}{2}$ vagy $x_2=3{,}87+2k\pi$, $x_3=5{,}55+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$.

A $[-\pi;\ \pi]$-ba eső zérushelyek: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=-0{,}73$, $x_3=-2{,}41$.

2695 Mivel $\sin x+\cos x$ legnagyobb értéke $\sqrt{2}$, ezért a nevező $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ mindig pozitív. Az egyenlőtlenség tehát akkor és csak akkor teljesül, ha a számláló pozitív:

$$\sin^2 x-\frac{1}{4}>0,$$
$$|\sin x|>\frac{1}{2}.$$

A megoldás:

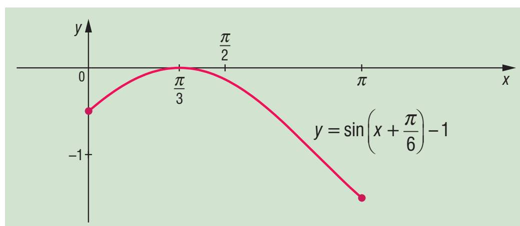
$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2696 Mivel $0\le x\le\pi$ esetén $0<x+\frac{\pi}{6}$, ezért:

$$\left|x+\frac{\pi}{6}\right|=x+\frac{\pi}{6},$$

tehát

$$\sin\left|x+\frac{\pi}{6}\right|-1=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1.$$



2697 Az egyenlet így írható $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítés és (–1)-gyel való beszorzás után:

$$\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$

A megoldóképletet alkalmazva:

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}\pm\frac{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}\pm\frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Tehát a megoldások:

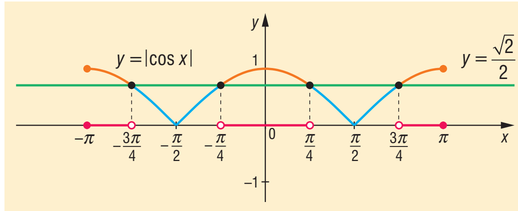
$$\sin x=\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a $[-\pi;\ \pi]$ intervallumban az egyenletnek 4 gyöke van.

2698 A $\cos^2 x - \frac{1}{2} > 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha $|\cos x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

A grafikonról leolvasható a megoldás:

$$-\pi \le x < -\frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < x \le \pi.$$



2699 *a)* Értelmezési tartomány: $\sin x \ne 0$, azaz $x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0,$$
$$\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 0,$$
$$\cos x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ értelmezési tartománya miatt $\sin x \ne 0$ és $\cos x \ne 0$. A feladatnak nincs megoldása.

c) Értelmezési tartomány: $x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$3 \cdot \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \cos x,$$
$$3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \cos x,$$
$$\cos x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x \ne 0$, akkor nincs megoldás, mert a következőt kapjuk: $\frac{3}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \sin x$.

d) $\cos x = 0$ esetén nincs megoldás, mert ekkor $\sin x = 1$, így:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = 3 \cdot \cos x,$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 3,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{\sqrt{3}},$$
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

e) Értelmezési tartomány: a tangens miatt $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, és a nevező miatt $\sin x \ne 0$, azaz $x \ne l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos x,$$

amiből a megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

f) Ha $\cos x = 0$, akkor nincs megoldás, ezért oszthatunk $\cos x$-szel:

$$\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0,$$

$$1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

g) Az egyenlet átalakítása:

$$\cos^3 x = \cos^2 x,$$

$$\cos^3 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x \cdot (\cos x - 1) = 0.$$

A kapott szorzat akkor lesz 0, ha $\cos x = 0$ vagy $\cos x - 1 = 0$:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\quad x_2 = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

2700 A függvényt értelmező képlet első tényezője π szerint, második tényezője 4π szerint periodikus, így a szorzat periódusa 4π.

2701 Az egyenletnek a valós számok körében nincs megoldása, mert azonos átalakítással a következő alakra hozható:

$$(x^2 + 2)^2 = -\cos^2 y.$$

A bal oldal 2^2-nél nem kisebb, a jobb oldal pedig nem pozitív.

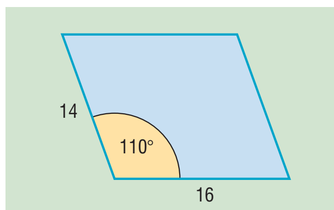
2702 A jobb oldal így írható: $2 - (y - 3)^2 \le 2$, és az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $y = 3$.

A bal oldalon $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, így $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \ge 2$, és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Geometriai alkalmazások – megoldások

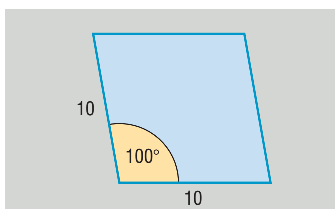
2703 Alkalmazzuk a tanult képletet:

$$t = 14 \cdot 16 \cdot \sin 110° = 14 \cdot 16 \cdot \sin 70° \approx 210{,}5.$$



2704 Itt is a paralelogramma területképlete vezet eredményre:

$$t = 10 \cdot 10 \cdot \sin 100° = 100 \cdot \sin 80° \approx 98{,}5.$$



2705 A háromszög köré írt kör sugarának kiszámítása:

$$b = 2 \cdot R \cdot \sin\beta, \quad \text{azaz} \quad 8 = 2 \cdot R \cdot \sin 71{,}36°,$$

amiből

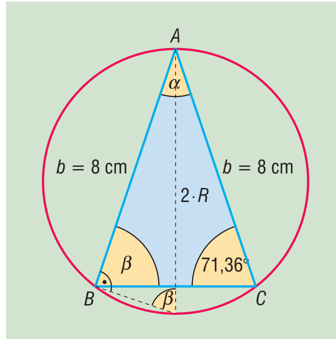
$$R = 4{,}22 \text{ cm}.$$

A hiányzó szög:

$$\alpha = 180° - 2 \cdot 71{,}36° = 37{,}28°.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{b \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{64 \cdot \sin 37{,}28°}{2} = 19{,}38 \text{ cm}^2.$$



2706 *a)* A szabályos nyolcszög középponti szöge: $360° : 8 = 45°$, így:

$$T_{\triangle} = \frac{R \cdot R \cdot \sin 45°}{2}, \quad T_{\text{nyolcszög}} = 8 \cdot T_{\triangle}.$$

Kétféleképpen felírva egy kis háromszög területetét:

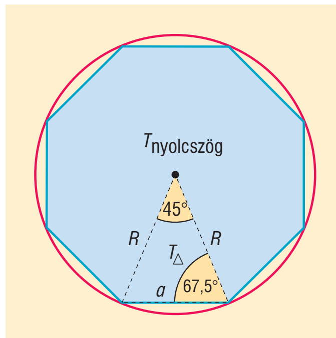
$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 45°}{2} = \frac{R \cdot a \cdot \sin 67{,}5°}{2},$$

$$R \cdot 0{,}7071 = 10 \cdot 0{,}9239,$$

$$R = 13{,}07 \text{ dm}.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$T_{\triangle} = 60{,}4 \text{ dm}^2 \text{ és } T_{\text{nyolcszög}} = 483{,}2 \text{ dm}^2.$$



Tehát a nyolcszög köré írható kör sugara 13,07 dm, a nyolcszög területe pedig 483,2 dm^2.

b) A szabályos ötszög középponti szöge: $360° : 5 = 72°$.

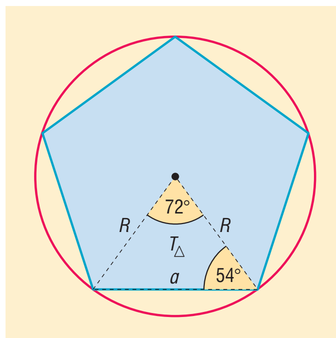
Kétféleképpen felírva egy kis háromszög területetét:

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 72°}{2} = \frac{R \cdot a \cdot \sin 54°}{2},$$

$$R \cdot 0{,}9510 = 10 \cdot 0{,}8090,$$

$$R = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Tehát 8,5 cm sugarú körbe írhatunk egy 10 cm-es oldalú szabályos ötszöget.

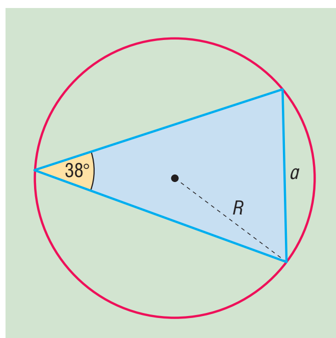


2707 A háromszög ismert oldalára felírható:

$$a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

$$6{,}8 = 2 \cdot R \cdot \sin 38°,$$

$$R = 5{,}52 \text{ cm}.$$



2708 A szabályos kilencszög középponti szöge: $360^\circ : 9 = 40^\circ$.
Írjuk fel a kilencszög területetét:

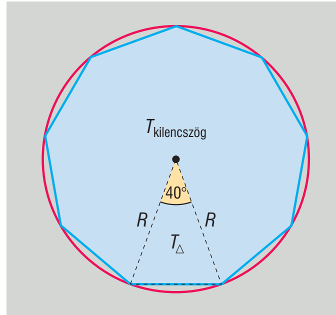
$$T_{\text{kilencszög}} = 1080 = 9 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sin 40^\circ}{2},$$

$$2160 = 9 \cdot R^2 \cdot 0{,}6427,$$

$$R^2 = 373{,}42,$$

$$R = 19{,}32 \text{ dm}.$$

Tehát a kilencszög köré írható kör sugara 19,32 dm.



2709 A húr hosszára felírható:

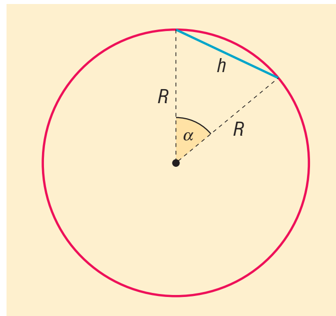
$$h = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

$$13{,}4 = 2 \cdot 8{,}7 \cdot \sin\alpha,$$

$$0{,}7701 = \sin\alpha,$$

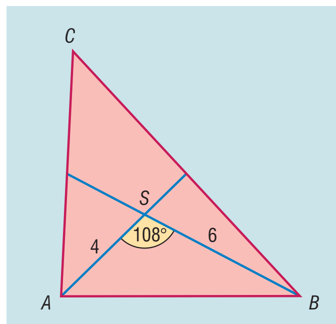
$$\alpha = 50{,}36^\circ.$$

A kerületi szög α-nak a fele, tehát 25,18°.



2710 Az ABS háromszög területe harmada az ABC háromszög területének, így a tanult képlet alapján az ABC háromszög területe:

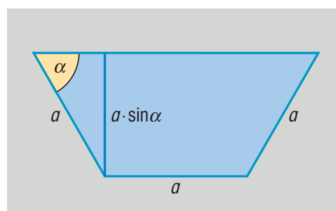
$$t = 3 \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot \sin 108^\circ}{2} = 36 \cdot \sin 72^\circ \approx 34{,}2.$$



2711 Az ábra alapján a trapéz területe:
$t = (a \cdot \cos\alpha + a) \cdot a \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.
Elég meghatározni a következő függvény maximumát:

$$f(\alpha) = (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha = (1 + \cos\alpha) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{(1 + \cos\alpha)^3 \cdot (1 - \cos\alpha)},\quad 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$$



A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával ezt kapjuk:

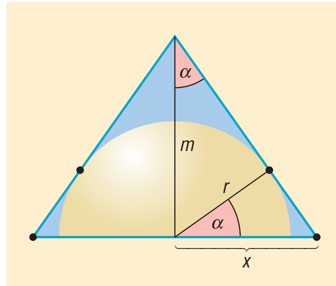
$$(1 + \cos\alpha)^3 \cdot 3 \cdot (1 - \cos\alpha) \le \left(\frac{3 \cdot (1 + \cos\alpha) + 3 \cdot (1 - \cos\alpha)}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $1 + \cos\alpha = 3 - 3 \cdot \cos\alpha$, azaz:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

A keresett maximum tehát $\alpha = 60^\circ$ esetében érhető el.

2712 A forgáskúp alapkörének sugara x, magassága m, félnyílásszöge pedig α. Az adott értékek közt a következő összefüggések állnak fenn:



$$x = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad m = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Mivel a forgáskúp térfogata:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot m,$$

így

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

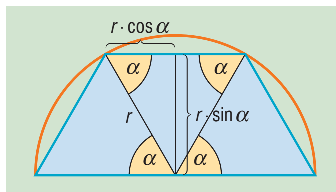
Mivel V minimumát keressük, elég meghatározni $\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)$ maximumát $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)^2 \le \left(\frac{2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot (1 - \sin^2\alpha)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha:

$$2 \cdot \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \quad \text{azaz} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5773, \quad \text{így} \quad \alpha = 35{,}3°.$$

2713 A trapéz területét a félkör r sugarával és α-val $\left(0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$ így írhatjuk fel:



$$t = r^2 \cdot \sin\alpha + r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = r^2 \cdot (\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

Az $f(x) = \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ függvény maximumát keressük. Elég meghatározni a következő szorzat maximumát:

$$3 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)^2 = 3 \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot (1 + \cos\alpha)^3 \le \left(\frac{3 \cdot (1 - \cos\alpha) + 3 \cdot (1 + \cos\alpha)}{4}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

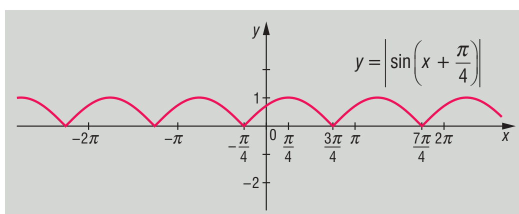
a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján.

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$3 \cdot (1 - \cos\alpha) = 1 + \cos\alpha, \quad \text{azaz} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{így} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Vegyes feladatok – megoldások

2714 A függvény grafikonja az ábrán látható.



2715 *a)* $\cos 5\pi = \cos\pi = -1;$

b) $\sin 7\pi = \sin\pi = 0;$

c) $\operatorname{tg} 800° = \operatorname{tg} 80° \approx 5{,}6713;$

d) $\operatorname{ctg} 500° = \operatorname{ctg} 140° = -\operatorname{tg} 50° \approx -1{,}1917.$

2716 *a)* $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \mapsto \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$, $x \mapsto -\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

b) $x \mapsto \cos(x + \pi)$, $x \mapsto -\cos x$, $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

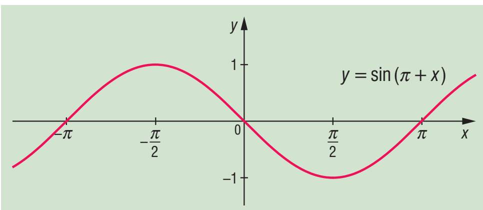
c) $x \mapsto 1 - \sin x$, $x \mapsto 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto 1 + \sin(x - \pi)$;

d) $x \mapsto 2 + \cos 2x$, $x \mapsto 2 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto 2 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;

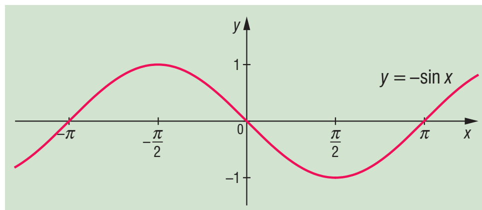
e) $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

f) $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, $x \mapsto 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

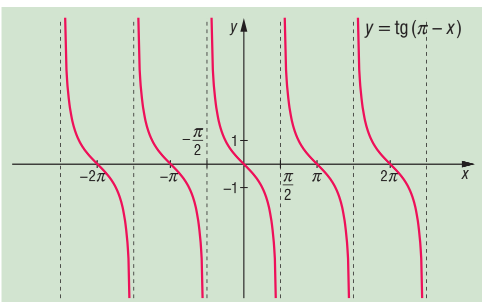
2717 *a)*



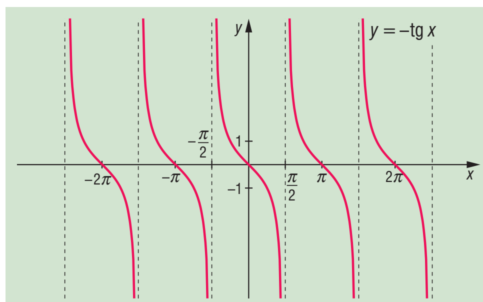
b)



c)



d)



2718 *a)* ÉT: $\mathbb{R}$;

b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

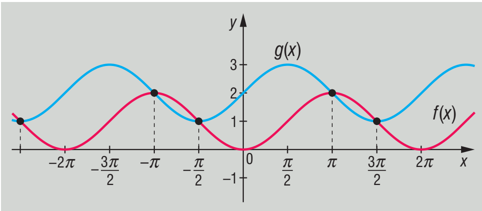
d) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

e) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

f) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

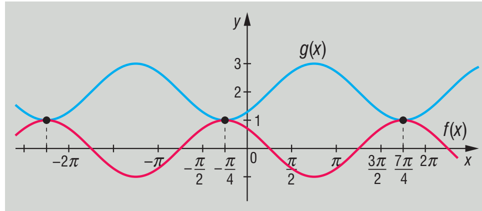
g) ÉT: $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{6} + 2k \le x \le \frac{5}{6} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2719 *a)*



$x_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z};$

b)



$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

2720 *a)* $-1 \le f(x) \le 0;$ *b)* $1 \le g(x) \le 3;$ *c)* $-3 \le h(x) \le -1;$ *d)* $-1 \le i(x) \le 3.$

2721 *a)* Írjuk be az ismert értékeket:

$$\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Gyöktelenítés után:

$$\frac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{1+3-2\cdot\sqrt{3}}{-2} = \frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}-4}{2} = \sqrt{3}-2.$$

b) Írjuk be az ismert értékeket:

$$\frac{\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}{2\cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot 1 - 3} = \frac{\frac{2}{4}}{-1} = -\frac{1}{2}.$$

c) Mivel $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, ezért

$$\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ,\quad \cos 40^\circ = -\cos 140^\circ,\quad \cos 60^\circ = -\cos 120^\circ,\quad \cos 80^\circ = -\cos 100^\circ.$$

Továbbá $\cos 180^\circ = -1$, így az összeg értéke is -1 lesz.

d) Mivel $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, ezért

$$\operatorname{tg} 20^\circ = -\operatorname{tg} 160^\circ,\quad \operatorname{tg} 40^\circ = -\operatorname{tg} 140^\circ,\quad \operatorname{tg} 60^\circ = -\operatorname{tg} 120^\circ,\quad \operatorname{tg} 80^\circ = -\operatorname{tg} 100^\circ.$$

Továbbá $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$, így az összeg értéke is 0 lesz.

2722 Használjuk fel a pótszöges összefüggéseket a gondolkodásnál.

a) $a(x)$-nél:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Tehát az $a(x) = \sin x + \sin x = 2\cdot\sin x$ függvényt kell ábrázolni.

b) $b(x)$-nél:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

Tehát a $b(x) = \cos x + (-\cos x) = 0$ függvényt kell ábrázolni.

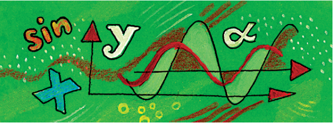
c) $c(x)$-nél: mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért a $c(x) = 1$ függvényt kell ábrázolni.

d) $d(x)$-nél: mivel $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 = 1^2 = 1$, ezért a $d(x) = 1$ függvényt kell ábrázolni.

e) $e(x)$-nél:

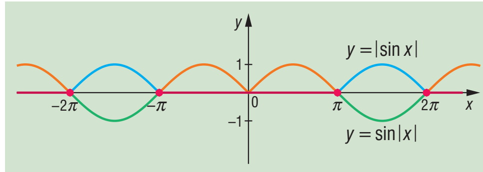
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Tehát az $e(x) = \sin x - \sin x = 0$ függvényt kell ábrázolni.



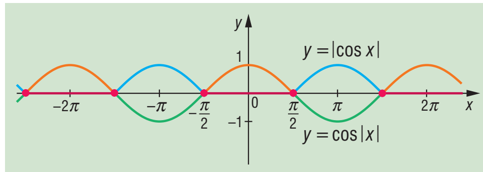
2723 *a)* A megoldások:

$$2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\pi + 2n\pi \le x \le 2n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



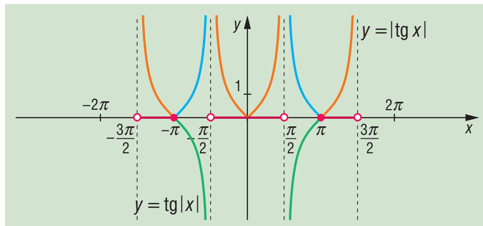
b) A megoldások:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



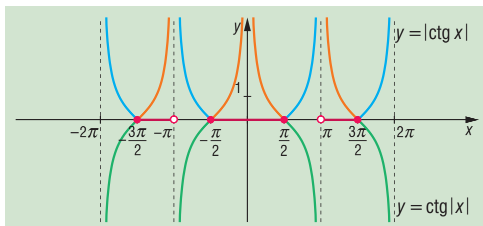
c) A megoldások:

$$k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x \le n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



d) A megoldások:

$$k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\frac{\pi}{2} + n\pi \le x < n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



2724 *a)* Használjuk fel, hogy $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$. A megoldás: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

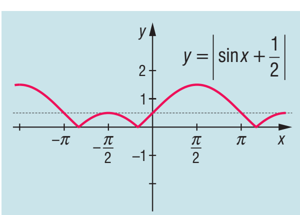
c) $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

d) $x = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$.

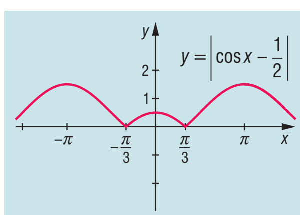
2725 *a)* $0 < x < \frac{\pi}{4}$; *b)* $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$; *c)* $225° < x < 360°$;

d) $0 \le x < \frac{7\pi}{12}$.

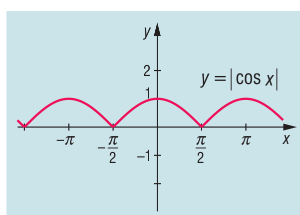
2726 *a)*



b)



c)



2727 *a)* Értelmezési tartomány: $\cos x \neq 1$, azaz $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$1 + \cos x = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$
$$1 - \cos^2 x = \sin x,$$
$$\sin^2 x - \sin x = 0,$$
$$\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, az értelmezési tartomány miatt a megoldás:

$$x_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $(\sin x - 1) = 0$, akkor a megoldás:

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

b) Ha $\cos^2 x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos^2 x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\sin^2 x}{3} = \cos^2 x,$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3,$$
$$\operatorname{tg}^2 x = 3,$$
$$|\operatorname{tg} x| = \sqrt{3}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, a megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, a megoldás:

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

c) Ha $\cos^2 x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos^2 x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, akkor oszthatunk vele:

$$6 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0,$$
$$6 - 3 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$
$$6 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x = 0,$$
$$2 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $(\operatorname{tg} x)_1 = 1$ és $(\operatorname{tg} x)_2 = -2$.
Ha $\operatorname{tg} x = 1$, a megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = -2$, a megoldás:

$$x_2 = -1{,}1 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

d) Ha $\cos x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor oszthatunk vele:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = 0,$$
$$\sqrt{3} \cdot \sin x = \cos x,$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos} = 1,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

e) Értelmezési tartomány: $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Szorozzunk be $\cos x$-szel:

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x,$$
$$\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$
$$0 = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$
$$\sin x \cdot \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\sin x = \frac{1}{2}$, akkor a megoldások:

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$

f) Átrendezés után:

$$\cos^2 x + 4 \cdot \cos x = 3 - 3 \cdot \cos^2 x,$$
$$4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x - 3 = 0,$$
$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}.$$

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x = -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás.

2728 *a)* Átrendezve: $\operatorname{ctg}^2 x = 1 - \sin^2 x$, azaz $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x$, így $\cos^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = 0.$

Ebből vagy $\cos x = 0$, vagy $\sin^2 x = 1$, azaz $\sin x = 1$ vagy $\sin x = -1$. Tehát:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) A $\sin x + \cos x = z$ helyettesítéssel a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$5z^2 - 13z + 8 = 0.$$

Ennek gyökei: $z_1 = \frac{8}{5}$, $z_2 = 1$. Mivel $\sin x + \cos x = \frac{8}{5}$ nem lehet a valós számok körében, így $\sin x + \cos x = 1$, ahonnan:

$$x_1 = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlet így írható:

$$\sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 = 0,$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 + \sin x + \cos x) = 0.$$

Tehát vagy $\sin x + \cos x = 0$ vagy $\sin x + \cos x = -1$.

Ha $\sin x + \cos x = 0$, $\cos x$-szel osztva ($\cos x \neq 0$): $\operatorname{tg} x = -1$, tehát:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

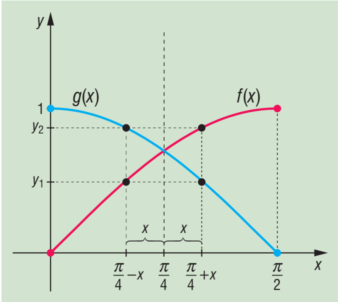
Ha $\sin x + \cos x = -1$, akkor:

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ vagy } x_3 = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

(Ez utóbbi eset megoldásához használhatunk függvénygrafikont is.)

2729 A függvények grafikonja az ábrán látható.

Az ábra szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenesre, ebből következnek az azonosságok. (Az ábrán csak $0 < x < \frac{\pi}{4}$ esetén szemléltettük.)



2730 *a)* Az egyenlőtlenség így írható:

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} > 2, \quad x \neq n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ismert, hogy ha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ezért mivel $\operatorname{tg}^2 x > 0$, így ez minden olyan esetben igaz, amikor $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$, azaz $|\operatorname{tg} x| \neq 1$, tehát ha:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Az egyenlőtlenség így írható:

$$\sin^4 x - 6 \cdot \sin^2 x + 5 > 0.$$

Helyettesítsünk $\sin^2 x = p$-t, így a $p^2 - 6p + 5 > 0$ zérushelyei: $p = 5$ és $p = 1$ miatt akkor és csak akkor lehet igaz, ha

$$\sin^2 x < 1 \quad \text{vagy} \quad \sin^2 x > 5.$$

Az utóbbi nem lehetséges, így a megoldások csak azok az x-ek, amelyekre $|\sin x| < 1$, tehát:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) A két függvény, $f(x) = \sin \pi x$ és $g(x) = \cos \pi x$, $x \in \mathbb{R}$ grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$\frac{1}{4} + 2k < x < \frac{5}{4} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Megjegyzés: Ügyeljünk arra, hogy csak $\sin\alpha > \cos\alpha$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk α-ra, majd $\alpha = \pi x$-et helyettesíteni.

d) Ha a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ azonosságot használjuk, akkor az egyenlőtlenség így írható:

$$1 + \sin x < \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x,$$

ahonnan ekvivalens átalakításokkal ezt kapjuk:

$$1 - \cos x < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - \cos x).$$

Ha $\cos x \neq 1$, azaz $x \neq 2k\pi$, akkor $1 - \cos x > 0$, tehát elég megoldani az

$$1 < \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

egyenlőtlenséget. Ennek a következő x értékek tesznek eleget:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x = 1$, akkor nincs megoldás x-re.